

# ДИАГНОСТИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

*Дружинин В. Н.*

(Методы психологической диагностики. Выпуск 1. Под ред. Дружинина В.Н. и Галкиной Т.В. Москва, 1993)

Теория математических способностей является одной из наиболее разработанных областей психологии способностей. Причин этому несколько.

Первая причина состоит в том, что математика одна из наиболее древних наук, является неотъемлемой частью человеческой культуры, и овладение ее основами или элементами—жизненная задача каждого человека. Вторая причина состоит в том, что для овладения математическим материалом и успешного решения математических задач требуется высокий уровень развития абстрактного мышления. Кроме того, вековой практикой установлено, что не только математическое творчество является прерогативой немногих лиц, но даже средний уровень овладения математическими понятиями и операциями дается различным людям с разным успехом.

Третья причина в высокой разработанности общепсихологической теории мышления,—заимствование многих моделей математики. Традиционно психология мышления и такие отрасли математики как математическая логика, теория операций, теория групп тесно взаимодействуют друг с другом, что проявляется при разработке проблем искусственного интеллекта.

Проблема отбора лиц со способностями к математике встала во всем мире к середине XX века. Если первоначально речь шла об отборе особо одаренных лиц, то впоследствии, ввиду широкой математизации различных отраслей науки и практики, встала задача диагностики математических способностей в массовой школе.

В данном исследовании мы рассматривали свою задачу как прикладную, заключающуюся в попытке применить разработанные сами принципы конструирования тестов познавательных способностей на примере теста математических способностей.

Поэтому мы не ставим цель усовершенствовать теорию математических способностей, а попытались применить ее результаты для конструирования соответствующего теста.

Традицию умозрительного исследования математического мышления следует, очевидно, вести еще от «Мыслей» Б. Паскаля, который впервые дал анализ и первичную классификацию типов математического мышления. С нашей точки зрения, следует отличать способность к математическому мышлению от математических способностей. Они относятся друг к другу как часть и целое.

В настоящее время исследователи сосредоточились на попытках выделить элементарные познавательные способности, лежащие в основе математической способности как комплексной способности. Математическая способность по сути рассматривается как свойство психологической функциональной системы деятельности (математической деятельности), а отдельные элементарные способности как свойства систем, ответственных за протекание познавательных процессов. Воспользуемся обобщением результатов исследования математических мыслительных способностей, которые дал Н. В. Метельский.

А. Кэймерон теоретически выделил следующие виды элементарных процессов, лежащих в основе математической познавательной деятельности:

- 1) анализ математической структуры и перекомбинирование ее элементов;
- 2) сравнение и классификация числовых и пространственных данных;
- 3) применение общих принципов и оперирование абстрактными количествами;
- 4) сила воображения.

Несколько иной список предлагает В. Коммсел:

- 1) ясное и логическое мышление;
- 2) сила абстракции;
- 3) комбинаторные способности;

- 4) пространственные представления и операции;
- 5) критическое мышление;
- 6) память.

Г. Томас выделяет следующие элементарные способности, лежащие в основе математической деятельности:

- 1) абстракция;
- 2) логическое рассуждение;
- 3) специфическое восприятие;
- 4) сила интуиции;
- 5) умение использовать формулы;
- 6) математическое воображение.

Выдающийся американский психолог Э. Торндайк предложил следующий список элементарных математических способностей, основанный на результатах:

- 1) способность обращаться с символами;
- 2) способность выбора и установления отношений;
- 3) способность обобщения и систематизации;
- 4) способность к выбору элементов и данных;
- 5) способность к приведению в систему идей и навыков.

Аналогичный интроспективный список выдвинул А. Ф. Лазурский. В него вошли: 1) систематичность и последовательность мышления; 2) его отчетливость; 3) способность к обобщению; 4) сообразительность; 5) память в области чисел.

Г. Хемли, Д. Ли выделили следующие типы математических операций, которыми должны владеть лица, занимающиеся математикой: а) установление классов; б) установление порядка; в) установление соответствий.

Как видно этот список не опирается на психологическую теорию познавательных процессов.

Ф. Митчел приводит такую последовательность математических способностей:

- 1) классификация;
- 2) понимание и операции с символами;
- 3) дедукция;
- 4) манипуляция с абстракциями без опоры на конкретное.

Легко заметить, что 2-й и 4-й пункт в списке Ф. Митчела аналогичны.

Выдающийся советский математик А. Н. Колмогоров выделил следующие элементарные математические способности:

- 1) алгоритмическая способность;
- 2) геометрическое воображение;
- 3) искусство логического рассуждения.

Эмпирические исследования математического мышления внесли ясность в многовероятность умозрительных построений. В советской психологии наиболее полно математические способности исследовал В. А. Крутецкий. На основе информационного подхода он выделил следующие математические способности при психологическом анализе познавательной деятельности школьников:

- 1) получение математической информации—способность к формализованному восприятию формальной структуры задачи;
- 2) переработка математической информации;
  - а) логическое мышление отношениями, числами, символами;
  - б) обобщение математических объектов, отношений, действий;
  - в) способность мыслить свернутыми структурами;
  - г) гибкость мыслительных процессов;
  - д) ясность, простота, экономичность и рациональность решений;
  - е) обратимость мыслительного процесса;
- 3) математическая память;

#### 4) математическая направленность ума.

Рассмотрим список, предложенный В. А. Крутецким. Математическая направленность ума относится скорее к потенциальным свойствам личности и связана с интересами и мотивацией. Математическая память является специфическим процессом, однако следует отметить, что нет доказательств, что она не определяется общей мнемической способностью. Способность к формализованному восприятию структуры задачи является не собственно способностью восприятия, а результатом мыслительной деятельности, и сходна по содержанию со способностями к переработке мыслительной информации (2а, б, в). Гибкость мыслительных процессов—неспецифический фактор. В настоящее время исследованиями В. М. Русалова показана его связь с пластичностью первичных процессов как свойством темперамента. Ясность, простота, экономичность и рациональность решения познавательного процесса. Обратимость мыслительного процесса согласно Ж. Пиаже, является свойством интеллекта, достигшего определенного развития—уровня конкретных и формальных операций.

«Личностное мышление отношениями, числами, символами», «обобщение математических объектов, отношений, действий», «способность мыслить свернутыми структурами»—по сути являются реализацией общемыслительных операций на математическом материале.

Таким образом, можно заключить, что «математические способности» предполагают, с одной стороны, высокий уровень развития мышления, а, с другой стороны, специфическую направленность на работу с математическим материалом, приводящую к способности оперировать абстрактными структурами.

Определенную ясность в этот вопрос внесли факторные исследования математического мышления.

М. Баркат эмпирически выделил 5 факторов, определяющих способность к математике: 1) общий фактор—G-фактор по Спирмену; 2) вербальный интеллект; 3) пространственный интеллект; 4) вычислительная способность; 5) память;

б) собственно математический фактор—способность манипулировать схемами и отношениями.

Результаты М. Барката во многом соответствуют тем теоретическим предложениям, которые высказывали математики и психологи по поводу природы математических способностей.

В исследовании И. Вердерлина выявилась высокая корреляция уровня развития математических способностей (фактор R—the general mathematical reasoning с выраженностью общего фактора интеллекта (G-общий интеллект по Спирмену), который в свою очередь сильно коррелирует с темпом мышления. Скоростной фактор мышления по данным Г. Айзенка и ряда других исследователей является врожденным. Поэтому не случайно, что его природа стала предметом специальных исследований. В работе В. Вайса было показано, что математические способности, которые являются системным свойством психики, имеют исключенную генетическую детерминацию. В. Вайс изучил три поколения родственников математически одаренных детей. В результате исследования им был сделан вывод, что высокий уровень развития математических и технических способностей определяется гипотетической аутосомной аллелью в гомозиготном состоянии. С его точки зрения, этот ген обеспечивает наследование способности к синтезу гипотетического фермента, определяющего скорость переработки информации мозгом, которая связана с JQ, и определяется генетически.

В настоящее время установлены высокие корреляции (0,8—0,9) величины JQ с временными параметрами и вариабельностью вызванных потенциалов мозга, а также с минимальным временем, необходимым субъекту для различения тахистоскопически предъявляемого простого изображения. Одно из последних факторно-аналитических исследований этой проблемы принадлежит Л. Т. Ямпольскому. Автор использовал тест для анализа логико-комбинаторного мышления, состоящий из двух субтестов: 1) обобщение

логических отношений и 2) дедуктивное умозаключение. Испытуемому нужно определить отношения родства. Первый субтест был более легким, второй—более трудным. Давалась смешанная инструкция: «Отвечать как можно быстрее, но правильно». Были сконструированы 15 точностных, временных и комбинированных параметров для оценки успешности деятельности испытуемых. После проведения экспериментов, данные подверглись факторизации. Л. Т. Ямпольский выявил фактор времени решения—скорость переработки информации и два фактора продуктивности, соответствовавшие уровням сложности задачи. Тем самым он показал, что для изменения успешности выполнения теста требуется  $p+1$  фактор, где  $p$ —уровни сложности заданий, а 1—время. Получена модель интеллекта вида:

$$J_i = F_i * F_t$$

где  $J_i$ —успешность решения задачи  $i$ -й трудности;  $F_i$ —правильность решения задачи  $i$ -й трудности;  $F_t$ —идеомоторная скорость.

Однако проблема измерения объективной трудности задач остается переменной. Следует отметить, что существует корреляция факторов, выделенных Л. Т. Ямпольским: фактор скорости коррелирует с правильностью решения сложных задач более, нежели с правильностью решения простых задач (г соответственно равны 0,389 и 0,202). Можно предположить, что скоростные свойства нервной системы проявляются при решении сложных задач потому, что для их успешного решения требуется проделать большее число элементарных мыслительных операций.

Можно согласиться с Н. В. Метельским, утверждающим, что существует два типа математических способностей вообще: 1) хороший уровень мышления вообще и 2) математическая интуиция. «Хороший уровень мышления» обусловлен скоростными параметрами переработки информации и проявляется в учебе. «Математическая интуиция» скорее всего связана со специфической способностью производить сложные операции со знаковым материалом (пространственным или дискретно—символическим) без опоры на наглядность. Высокая скорость переработки информации еще более усиливает эту способность. Можно предположить справедливость следующей модели:

$$J = R * F_t / T$$

где  $J$ —успешность решения задачи;  $R$ —уровень развития «математических способностей»;  $F_t$ —индивидуальная идеомоторная скорость;  $T$ —сложность задачи.

Тем самым объясняется высокая корреляция математических способностей с общим интеллектом (фактор  $G$ ), а также их специфичность.

Н. В. Метельский произвел классификацию основных форм математических задач. С его точки зрения, «задачный материал можно подразделить так: тренировочные учебные упражнения, рассчитанные в основном на закрепление знаний и выработку умений и навыков; нестандартные задачи, требующие самостоятельного творческого применения или теоретической информации и логических форм продуктивного мышления; эвристические задачи, требующие изобретения новых методов их решения и эффективно развивающие эвристическое мышление и математические способности учащихся». Первые две группы задач отличаются по признаку стандартности, но и в них требуется применить известное знание о математических объектах. Третья группа задач направлена на нахождение нового для учащегося знания. Следовательно, возможно разделить задания на два класса: задания, требующие применения известного ученику знания о математических объектах, и задания, требующие нахождения нового для ученика знания об объектах.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: математические способности не сводятся к общему интеллекту, а представляют собой свойство системы познавательных процессов, проявляющееся в эффективном решении сложных познавательных задач, решение которых требует умственных операций с пространственным и символическим материалом без опоры на наглядность.

#### Тест математических аналогий

Задания, включаемые в тест математических аналогий, должны удовлетворять

требованиям, предъявляемым к любым тестам способностей: быть стандартными, однородными по структуре, быть эквивалентными по трудности или же упорядоченными по трудности. Кроме того, они должны удовлетворять требованиям теоретической валидности: диагностировать математическую способность как таковую. К этому добавляется требование экологической валидности теста: соответствие его научно-практической задаче.

Поскольку важнейшим требованием, предъявляемым нами к задачам, была их применимость в школьной практике, в качестве тестового материала нами были использованы задачи, разработанные А. Г. Гайштутом, направленные на формирование у учащихся таких умственных операций, как анализ, синтез, аналогия, обобщение.

С точки зрения автора, «Математика, как известно, наука доказательная, или дедуктивная... Но доказательство открывается с помощью правдоподобного рассуждения, с помощью догадки. Два типа рассуждения—доказательное и правдоподобное—дополняют друг друга». Задачи, предложенные А. Г. Гайштутом, сформулированы на основе материала из курса математики с 4 по 10 класс и состоят из 5 серий: 4 класс, 5 класс, 6—7 класс, 8 класс, 9—10 класс. Решение задач каждого типа предполагает знание учебного материала, но помимо того способность к мысленному обнаружению отношений между пространственными и знаковыми элементами условий задачи и умения производить математические операции с математическими структурами. Таким образом, задачи, предложенные А. Г. Гайштутом, могут быть использованы для диагностики уровня развития мышления, мыслительной способности оперировать абстрактными структурами на математическом материале. Рассмотрим образец задачи:

**1. Найти**                      Электричество    XIII  
неизвестное    математик                      ?

В данные задачи входят 4 элемента, один из которых неизвестен. Требуется найти неизвестный элемент. Решение может быть найдено только тогда, когда будет решена вспомогательная задача: выделены отношения элементов начальных условий задачи. Между элементами «электричество» и XIII отношение тождества: число букв в слове «электричество» равно 13, между элементами «электричество» и «математик»—отношение различия: разное число букв. Следовательно, требуется, чтобы неизвестное находилось в отношении тождества с элементом «математик» и в том же отношении количественного различия с элементом XIII, как элементы «математик» и «электричество». Неизвестный элемент—число IX. Следовательно, испытуемый должен произвести операции сравнения элементов, выделить тип отношений—количественные различия, и сделать умозаключение по аналогии. Как видно, отношения между элементами задачи арифметические, от испытуемого требуется знание цифровых обозначений и умение читать и считать, а также владение арифметическими действиями. Следовательно, данная задача соответствует уровню подготовки школьника 4-го класса. Тем самым, несмотря на то, что в задаче присутствует конкретный материал и для его решения требуются стандартные знания и умения, успешно решить эту задачу можно, только обладая определенным уровнем развития мыслительной способности, оперируя с символическими (пространственно-знаковыми) структурами. Следовательно, задачи удовлетворяют выдвинутому нами требованию: диагностировать одновременно уровень развития продуктивного математического мышления (открытие новых отношений) и репродуктивного математического мышления (нахождение решения при помощи применения знаний). Поскольку материал теста должен соответствовать учебной программе средней школы, тест был разбит на 5 субтестов: 1) субтест для 4 класса, 2) субтест для 5 класса, 3) субтест для 6 класса, 4) субтест для 7—8 классов и субтест для 9—10 классов.

Приведем результаты стандартизации теста математических аналогий (ТМА).

Общее число испытуемых было равно 350. Число испытуемых каждого учебного класса—50. Получены следующие значения средних и дисперсий, характеризующих

трудность и дифференцирующую силу теста.

Обычная школа			Школа с математическим уклоном	
	Средняя	Сигма	Средняя	Сигма
4 кл.	5.56	1.34	-	-
5 кл.	2.3	1.25	-	-
6 кл.	4.29	1.83	-	-
7 – 8 кл.	6.08	1.96	6.21	1.92
9 – 10 кл.	2	1.53	5.6	1.51

Тем самым выявилось, что субтесты для 5 класса и для 9 класса вызывали затруднения у учеников. Однако следует отметить, что тестирование учеников 9—10 класса обычной школы проходило после окончания уроков. Опрос учащихся показал, что они были утомлены и не испытывали интереса к выполнению заданий.

Следует отметить, что при тестировании в остальных классах получены значения  $X$  близкие к 5 баллам (5 правильно решенных задач), что свидетельствует об эквивалентности заданий. Дисперсии среднего балла значимо не различаются. Следовательно, все субтесты обладают примерно равной дифференцирующей силой.

Рассмотрим показатели дифференцирующей силы и трудности отдельных заданий на примере субтеста для 7—8 класса.

Коэффициент трудности отдельных заданий находится в пределах  $0,25 < p < 0,71$ .

Тем самым можно утверждать, что тестовые задания относятся к группе заданий средней трудности.

Приведем данные трудности задач для всех субтестов, где трудность равна отношению числа испытуемых, решивших тест к общему числу испытуемых.

Субтесты	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4 класс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.51	.25	.36	.41	.60	.32	.20	.51	.62	.30
5 класс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.53	.21	.76	.10	.65	.70	.18	.70	.70	.29
6 класс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.59	.20	.20	.44	.20	.68	.20	.20	.24	.50
7 – 8 кл.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.53	.31	.47	.31	.70	.56	.10	.67	.60	.73
9 – 10 кл.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.30	.56	.61	.70	.20	.62	.31	.42	.59	.60

Соответствующие результаты оценки дифференцирующей силы задач в единицах стандартного отклонения (сигма)

Субтесты	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4 класс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.53	.40	.47	.39	.41	.51	.48	.36	.39	.41
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

класс	.51	.41	.43	.20	.49	.17	.39	.29	.46	.17
6 класс	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 – 8 кл.	.51	.48	.51	.48	.41	.51	.25	.25	.45	.25
9 – 10 кл.	.52	.41	.52	.41	.41	.51	.26	.49	.51	.46

Предлагаемый тест математических аналогий—«Задачи Гайштута» (ТМА) может быть использован для диагностики уровня развития общего интеллекта и математических способностей. Тест обладает достаточной внутренней и внешней валидностью. Успешность выполнения теста связана с уровнем развития способности к мысленному решению задач, понятийного и пространственного мышления. Тест следует испытывать, при проведении контрольных и самостоятельных работ, так как он стандартизирован в этих ситуациях. Следует избегать включения теста в экзаменационные работы. ТМА следует применять после прохождения соответствующего учебного материала, т. е. в конце года (4, 5, 6 классы) или 2-х лет обучения (7—8, 9—10 классы). Задачи теста обладают высокой однородностью. Если испытуемые решают больше 5 заданий, можно считать, что они обладают высоким уровнем развития способности мыслить аналогиями. Если меньше, то не следует ставить определенного диагноза. Необходимо провести через некоторое время повторное обследование и использовать в качестве дополнения другие аналогичные тесты.

#### Литература

1. Гайштут А. Г. Математика в логических упражнениях.—Киев. Радянська школа.—1985.—192 с.
2. Г у р е в и ч К. М. Тесты интеллекта в психологии. // *Вопр. психол*—1982.—№ 2, с. 28—32.
3. Крутецкий В. А. Психология математических способностей. М. Просвещение. 1968. 432 с.
4. Кулагин Б. В. Основы профессиональной психодиагностики, Л. 1984.
5. Мательский Н. В. Психолого-педагогические основы дидактики математики.—Минск. Вышшая школа. 1977, с. 149—160.
6. Пиаже Ж., Инельдер Б. Генезис элементарных логических структур: классификация и сериация. М. Иностр. лит.—1963. 446 с.
7. Психодиагностика. Теория и практика / Под. ред. Н. Ф. Талызиной.—М. Прогресс. 1986. 207 с.
8. Guilford J. T. The nature of Human intelligence.—N.—Y.: M: Graw—Hills. 1967. 538 p.
9. W i t z l a c k G. Grundlagen der Psychodiagnostik.—Berlin.—1977.